# Chapitre 4

# Fonctions dérivables

## Sommaire

**La dérivée d'une fonction renseigne sur certaines particularités de son graphe. Elle permet d'identifier :**

- **Pour quelles valeurs de son domaine de définition la courbe croît ou décroît ?**
- **Quels sont les extremums relatifs (locaux) ou absolue (globaux) de la fonction ?**

# 1 Dérivée en un point

**Définition 1.1.** *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable au point $x_0$ si :*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

*Dans ce cas cette limite $\ell$ est appelée la dérivée de $f$ en $x_0$ et est noté $f'(x_0)$.*

**Remarque 1.1.** *Si on prend $h = x - x_0$ on aura*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

**Exemple 17.** *Les fonctions affines : $f(x) = ax + b$*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

## 1.1 Interprétation géométrique

**Soient $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \mathcal{C}_f$ et $M = (x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. La quantité, dite taux d'accroissement de $f$ au voisinage de $x_0$**

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

**représente la pente de la droite $(M_0M)$. Si ce quotient a une position limite quand $x \longrightarrow x_0,\ x \neq x_0$, alors cette limite $f'(x_0)$ est appelée le coefficient directeur (ou la pente) de la tangente en $(x_0, f(x_0)$, de plus l'équation de la tangente est :**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

**Si le taux de variations $T_{f,x_0}$ de $f$ au voisinage de $x_0$ tend vers $\pm\infty$, on dit que $f$ admet une dérivée infinie et on note $f'(x_0) = \pm\infty$.**
**La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, au point $x_0$, est dite tangente verticale.**

**Exemple 18.** *La fonction $f(x) = x^2$ et dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x$. Ainsi l'équation de la tangente de la courbe représentative de $f$ au point $(1, 1)$ est $y = 1 + 2(x - 1)$.*

## 1.2 Dérivée à gauche, dérivée à droite

**Définition 1.2.** – *Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite en $x_0$ si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \quad \textit{existe.}$$

– *Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à gauche en $x_0$ si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) \quad \textit{existe.}$$

**Proposition 1.1.** *La fonction $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche de $x_0$ et on a $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.*

# 2 Propriétés des fonctions dérivables

## 2.1 Continuité

**Théorème 2.1.** *Si la fonction $f$ est dérivable en un point $x_0$ alors $f$ est continue en $x_0$.*

***Démonstration.*** **Exercice.**

**Remarque 2.1.** *La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet la fonction $x \longrightarrow |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0 car*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

## 2.2 Extemum local d'une fonction

**Définition 2.1.** ***Extremum, Extremum local***
*Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.*

- *Extremum global*
  – *On dit que $f$ admet un maximum (globale) en $a$ si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq f(a)$. Si c'est le cas, on pose $f(a) = \max_{x \in \mathrm{I}} f(x)$.*
  – *On dit que $f$ admet un minimum (globale) en $a$ si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq f(a)$. Si c'est le cas, on pose $f(a) = \min_{x \in \mathrm{I}} f(x)$.*
- *Extremum local*
  – *On dit que $f$ admet un maximum local en $a$ si et seulement si $\exists V$, voisinage de $a$, tel que $\forall x \in V,\ f(x) \leq f(a)$.*
  – *On dit que $f$ admet un minimum local en $a$ si et seulement si $\exists V$, voisinage de $a$, tel que $\forall x \in V,\ f(x) \geq f(a)$.*
- *On dit que $f$ admet un extremum (respectivement un extremum local) si $f$ admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).*

**Proposition 2.1.** *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si $f$ admet un extemum au point $x_0$ et si $f$ est dérivable en ce point alors $f'(x_0) = 0$.*

***Démonstration.*** **On suppose par exemple que $x_0$ est un maximum. Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors on a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

**or on a** $\quad f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$

**et on a** $\quad f'_g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$

**ce qui donne**

$$f'(x_0) = 0.$$

**Remarque 2.2.** *L'existence d'un extremum (maximum ou minimum) local n'entraine pas forcément la dérivabilité de $f$ en ce point. En effet la fonction $f(x) = |x|$ admet un minimum en 0, alors que $f$ n'est pas dérivable en 0.*

**Exemple 19.** *La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. $f$ admet un minimum au point $0$ ainsi $f'(0) = 0$.*

# 3 Opérations sur les fonctions dérivables

**On dit que $f$ est dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathrm{I}$. On notera $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivable en tout point de $\mathrm{I}$. On a bien**

$$\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$$

**Proposition 3.1.** *Soient $f, g \in \mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Alors $(f+g), (\alpha f)(\alpha \in \mathbb{R}), (f.g)$ et $(\frac{1}{f})(f \neq 0)$, sont des fonctions dérivables sur $\mathrm{I}$ et on a*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

***Démonstration.***

1. **On a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

**et donc**

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

**ce qui montre la première formule.**

2. **On a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0),$$

**ce qui montre la deuxième formule.**

**3. On a**

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

**et donc**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

**et puisque $f$ est continue en $x_0$ on a $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ et donc**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

**ce qui montre la troisième formule.**

**4. On a,**

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)f(x_0)f(x)}\\ &= -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.\end{aligned}$$

**Noter qu'on a utilisé encore le fait que $f$ est continue en $x_0$ et donc $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$, ce qui montre la quatrième formule.**

**5. La formule**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

**est un résultat des formules 3 et 4.**

**Théorème 3.1.** *Soient $f\in\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{F}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ deux fonctions et soit $x_0\in\mathrm{I}$ tel que $f(x_0)\in\mathrm{J}$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $g$ en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en $x_0$ et on a*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

***Démonstration.*** **On a $f$ est dérivable en $x_0$ donc**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

**et on a $g$ est dérivable en $f(x_0)$ donc**

$$\lim_{y\longrightarrow f(x_0)}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}=g'(f(x_0)).$$

**D'autre part on a**

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

**puisque lorsque $x\longrightarrow x_0$, $f(x)\longrightarrow f(x_0)$ ($f$ étant continue en $x_0$), on déduit que**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g'(f(x_0)),$$

**ce qui montre la formule souhaitée.**

**Théorème 3.2.** *Soit $f$ une fonction définie et continue sur $\mathrm{I}$ et strictement monotone sur $\mathrm{I}$. Si $f$ est dérivable en un point $x_0\in\mathrm{I}$ et $f'(x_0)\neq 0$. Alors $f^{-1}$ est dérivable au point $y_0=f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

***Démonstration.*** **$f$ est continue et strictement monotone sur $\mathrm{I}$ donc $f$ est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone aussi. On a**

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}}.$$

**Lorsque $y\longrightarrow y_0$, $x\longrightarrow x_0$ ($f^{-1}$ étant continue en $y_0$) et puisque $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0)\neq 0$, et il en résulte que**

$$\lim_{y\longrightarrow y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

# 4 Théorèmes fondamentaux

## 4.1 Théorème de Rolle

**Théorème 4.1.** *Soit $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors, il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

***Démonstration.*** **$f$ est continue sur $[a,b]$ donc d'après le théorème de maximum $f$ est bornée et atteint ses bornes donc**

$$\exists c_1,c_2\in[a,b]/\ f(c_1)=m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\ \textbf{et}\ f(c_2)=M=\sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

- **Si $m=M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc $f$ est constante sur $[a,b]$ et par suite pour tout $c\in]a,b[$, $f'(c)=0$.**
- **Si $m\neq M$, la fonction $f$ atteint son minimum en $c_1$,**

- **si** $m = f(a) = f(b)$**, comme** $f$ **atteint son maximum en** $c_2$ **et** $m \neq M$**, alors** $c_2 \in ]a, b[$ **et** $f'(c_2) = 0$ **d'après la proposition 2.1.**
- **sinon,** $c_1 \in ]a, b[$ **et** $f'(c_1) = 0$ **d'après la proposition 2.1.**

## 4.2 Théorème des accroissements finis

**Le théorème des accroissements finis est une généralisation du théorème de Rolle.**

**Théorème 4.2.** *Soit* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. Alors il existe au moins un point* $c \in ]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

***Démonstration.*** **On considère la fonction** $\varphi$ **définie par**

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$\varphi$ **est définie et continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$ **de plus** $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$**, donc d'après le théorème de Rolle, il existe** $c \in ]a, b[$ **tel que** $\varphi'(c) = 0$**. Or**

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$\varphi'(c) = 0$ **donc** $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

**Exemple 20.**

1. *Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que*

$$\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$$

*On a* $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$*. Soit* $2 < x < 3$*, la fonction* $\ln$ *est continue sur* $[2, 3]$*, dérivable sur* $]2, 3[$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un* $c \in ]2, 3[$ *tel que*

$$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3 - 2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

*or* $c \in ]2, 3[$ *donc* $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$ *d'où le résultat souhaité.*

2. *Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}}\right).$$

*Soit* $0 < x < 1$*. La fonction* $e^x$ *est continue sur* $[\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}]$ *et est dérivable sur* $]\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}[$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c(x) \in ]\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}[$ *tel que*

$$e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{c(x)}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{(1 - x)e^{c(x)}}{x^2}.$$

*On aura alors*

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = (1 - x)e^{c(x)}.$$

*Puisque* $\frac{1}{x} < c(x) < \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{c(x)} = +\infty$ *et donc*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^2 \left( e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty.$$

## 4.3 Application du TAF : Variations d'une fonction

**Proposition 4.1.** *(Variations d'une fonction)*
*Soit* I *un intervalle ouvert et* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *une fonction continue et dérivable sur* I. *Alors :*

1. *La fonction* $f$ *est croissante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$.
2. *La fonction* $f$ *est décroissante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leq 0$.
3. *La fonction* $f$ *est constante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

***Démonstration.***

1. **Supposons que la fonction $f$ est croissante et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Pour tout $x$ distinct de $x_0$, on a**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \geq 0.$$

**Supposons que la dérivée de $f$ est positive dans l'intervalle I. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ avec $x \leq y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in ]x, y[$ tel que**

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

**et donc $f(y) \geq f(x)$. Ceci montre que $f$ est croissante sur I.**

2. **Supposons que la fonction $f$ est décroissante et soit $x_0 \in I$. Pour tout $x$ distinct de $x_0$, on a**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \leq 0.$$

**Supposons que la dérivée de $f$ est négative dans l'intervalle I. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ avec $x \leq y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in ]x, y[$ tel que**

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

**et donc $f(y) \leq f(x)$. Ceci montre que $f$ est décroissante sur I.**

3. **Nous avons vu que si $f$ est constante sur I alors $f'$ est nulle sur I. Supposons maintenant que $f'$ est nulle en tout point intérieur de I. Fixons $x \in \mathrm{I}$ et soit $y \in \mathrm{I}$. Si $x < y$, appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in ]x, y[$ tel que**

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$$

**et donc $f(y) = f(x)$. Si $y < x$, on montre de la même manière que $f(x) = f(y)$.** □

**Remarque 4.1.** *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *une fonction continue et dérivable sur* I.

1. *Si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) > 0$ *alors la fonction* $f$ *est strictement croissante sur* I.
2. *Si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) < 0$ *alors la fonction* $f$ *est strictement décroissante sur* I.

## 4.4 Théorème des accroissements finis généralisé

**Théorème 4.3.** *Soit $f, g \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

***Démonstration.*** **On considère la fonction $\varphi$ définie par**

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

**Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or**

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(c)) = 0 \;\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**d'où le résultat.**

**Exemple 21.** *1. En utilisant le théorème des accroissements finis généralisé, nous allons calculer la limite*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2-1}{x^4}.$$

*En effet*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2-1}{x^4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2-cos0^2}{x^4-0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-2x\sin x^2}{4x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

## 4.5 Application du TAF généralisé : La règle de l'Hôpital

**Comme conséquence du théorème des accroissements finis généralisé, on obtient la règle de l'Hôpital qui s'énonce ainsi :**

**Proposition 4.2.** ***(La règle de l'Hôpital en un point)***
*Soient $f, g$ deux fonctions continues sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ et dérivables sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[/\{x_0\}$ tel que pour tout $x \in ]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[/\{x_0\}$ $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ alors*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

***Démonstration.*** **Pour tout $x \in ]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, (sans perdre de généralité on peut supposer que $x > x_0$), $f$ et $g$ sont donc continues sur $[x_0, x]$ dérivables sur $]x_0, x[$ et d'après le théorème des accroissements finis généralisé il existe un $c(x) \in ]x_0, x[$ tel que**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

**puisque $c(x) \in ]x_0, x[$ alors, lorsque $x \longrightarrow x_0$, $c(x) \longrightarrow x_0$, il en résulte que**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c(x)\longrightarrow x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \ell.\square$$

**Proposition 4.3.** ***(Régle de l'Hôspital au point infini)*** *Si $f, g$ dérivables sur $]a, +\infty[$ (rep.$]-\infty, a[$) $(a > 0)$ tel que $g'(x) \neq 0$. On suppose en outre que $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) = 0 (ou\ \infty)$ alors*

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

**Exemple 22.** *En utilisant la règle de l'Hôpital, nous allons calculer la limite*

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}.$$

*Posons $f(x) = x\ln x - (x-1)$ et $g(x) = (x-1)^2$. Ces deux fonctions satisfont les hypothèses de la proposition 4.2 et donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

## 4.6 Inégalité des accroissements finis

**Corollaire 9.** *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f'$ est bornée sur $]a,b[$, c'est-à-dire, qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in ]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors, pour tout $x, y \in [a,b]$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

***Démonstration.*** **Soient $x, y \in [a,b]$ avec $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$, il existe $c \in ]x,y[$ tel que**

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y).$$

**On déduit alors que**

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq M|x-y|.$$

$\square$

**Exemple 23.** *1. Montrer que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leq |x-y|.$$

*On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

*Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f'(t) = \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

*On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$|1-t^2| \leq 1+t^2 \leq (1+t^2)^2$$

*et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$|f'(t)| \leq 1.$$

*Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq |x-y|.$$

2. *Montrer que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

*On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$g(t) = \arctan t.$$

*Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$|g'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)} \leq 1.$$

*Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

## 4.7 Application de l'inégalité des accroissements finis

**Théorème 4.4.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. On suppose que $f$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si de plus, il existe $K > 0$ telle que*

$$|f'(x)| \leq K, \quad \forall x \in ]a,b[$$

*alors $f$ est $K$-lipschitzienne sur l'intervalle $[a,b]$.*

***Démonstration.*** **Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis avec $M = K$.** $\square$